چکیده مبسوط مقالات ششمین سمینار
بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن
۱۸ و ۱۹ خردادماه ۱۳۹۰، دانشگاه اراک، اراک

محاسبه تجزیه UL ناقص به عنوان محصول فرعی الگوریتم فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو

فاطمه شهلایی
دانشگاه تربیت معلم سبزوار
fateme_shahlaei@yahoo.com
امین رفیعی
دانشگاه تربیت معلم سبزوار
rafiei.am@gmail.com

چکیده

در این مقاله، روش جدیدی برای محاسبه‌ی تجزیه UL ناقص ماتریس A ارائه می‌شود. این تجزیه، به عنوان محصول فرعی روش فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو ساخته می‌شود. این تجزیه UL ناقص را به عنوان پیش شرط چپ، برای دستگاه‌های خطی به کار برده و کیفیت آن را با کیفیت تجزیه LU ناقص که به عنوان محصول فرعی روش فاکتورسازی معکوس تقریبی پیشرو [۴] به دست می‌آید مقایسه می‌کنیم.

واژه های کلیدی: تجزیه UL ناقص، روش BFAPINV، روش های زیرفضای کریلف، پیش شرط سازی.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 65F08، 65F10، 65F50، 65F.

۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی

$$AX = b, \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید که $A \in R^{n\times n}$، ماتریسی نامتقارن، نامنفرد، با بعد بزرگ و تنک می باشد. هم چنین، $X, b \in R^n$ می‌باشند. برای حل چنین دستگاهی از روش‌های زیر فضای کریلف

استفاده می‌شود [۵]. فرض کنید $M \approx A$ باشد. دستگاه

$$M^{-1}AX = M^{-1}b, \qquad (۲)$$

دستگاه پیش شرط شده چپ دستگاه (۱) نامیده می‌شود و ماتریس M را ماتریس پیش شرط چپ می‌نامند [۵]. به منظور شتاب بخشیدن در روند یافتن جواب X، می‌توان روش‌های زیر فضای کریلف را برای حل دستگاه (۲) مورد استفاده قرار داد.

در این مقاله، الگوریتم جدیدی برای محاسبه ماتریس پیش شرط M معرفی می‌کنیم که M به شکل $M = UL$ خواهد بود و U و L به ترتیب ماتریس‌های بالا مثلثی یکانی و پایین مثلثی است.

در الگوریتم ۱ این مقاله، $A_{:,j}$ و $A_{j,:}$ به ترتیب نشان دهنده ستون j ام و سطر j ام ماتریس A می‌باشند.

۲ الگوریتم IULBF

فرض کنید A ماتریس نا متقارن و $W = [w_1^T, \dots, w_n^T]^T$، $Z = [z_1, \dots, z_n]$ به ترتیب ماتریس‌های بالا مثلثی یکانی، پایین مثلثی یکانی و D ماتریس قطری باشد. با استفاده از الگوریتم فاکتورسازی معکوس پسرو یا BFINV (Backward Factored INVverse) [۲]، می‌توان ماتریس‌های W، Z و D را چنان ساخت که رابطه زیر برقرار باشد،

$$WAZ = D. \qquad (۳)$$

در گام j ام الگوریتم BFINV، سطر $(n-j+1)$ ام از ماتریس W و $(n-j+1)$ اُمین ستون ماتریس Z ساخته می‌شود و نام گذاری پسرو بدین دلیل است.

اگر در الگوریتم BFINV، بر روی درایه‌های بردارهای w_j و z_j فرآیند حذف به کار رود، یعنی به ازای $l > j$،

$$if \mid z_{lj} \mid < \varepsilon_Z \quad \rightarrow \quad z_{lj} = 0, \qquad (۴)$$

$$if \mid w_{jl} \mid < \varepsilon_W \quad \rightarrow \quad w_{jl} = 0, \qquad (۵)$$

آنگاه تقریبی از فاکتورهای W، Z و D در (۳) ساخته می‌شود و رابطه

$$WAZ \approx D,$$

برقرار است. در رابطه‌های (۴) و (۵)، ε_Z و ε_W به ترتیب برابرپارامتر حذف کردن، درایه‌های ماتریس‌های Z و W می‌باشند. در این حالت ماتریس‌های W، Z و D فاکتورهای معکوس

تقریبی ماتریس A نامیده می‌شوند و فرآیند، فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو یا BFAPINV (Backward Factored APproximate INVerse) نامیده می‌شود[۳]. می‌توان یک تجزیه UL ناقص (IUL)، از ماتریس A را به عنوان محصول فرعی فرآیند BFAPINV به دست آورد که L، ماتریس پایین مثلثی و U، ماتریس بالا مثلثی یکانی است و رابطه

$$A \approx M = UL, \tag{۶}$$

برقراراست. تجزیه UL ناقص ماتریس A در (۶) را IULBF (IUL factorization obtaind from Backward Factored APproximate INVerse) می‌نامیم. در این حالت، بین فاکتورهای W، Z، D، L و U رابطه‌های زیر برقرار است

$$L \approx DZ^{-۱}, \quad U \approx W^{-۱}.$$

Algorithm 1 (IULBF الگوریتم)

1. $w_n = e_n^T, \quad z_n = e_n, \quad d_n = a_{nn}.$
2. for $j = n - ۱$ to ۱ do
3. $\quad w_j = e_j^T, \quad z_j = e_j.$
4. $\quad$ for $i = j + ۱$ to n do
5. $\qquad U_{ji} = \frac{A_{j,:}z_i}{d_i}, \qquad L_{ij} = \frac{w_i A_{:,j}}{d_i}$
6. $\qquad$ apply a dropping rule to U_{ji} and L_{ij}
7. $\qquad z_j = z_j - (\frac{w_i A_{:,j}}{d_i})z_i, \qquad w_j = w_j - (\frac{A_{j,:}z_i}{d-i})w_i$
8. $\qquad$ for all $l \geq i$ apply a dropping rule to z_{lj} and to w_{jl}
9. $\quad$ end for
10. $\quad d_j = w_j A_{:,j}$ (if A is not positive definite)
11. $\quad d_j = w_j A w_j^T$ (if A is positive definite)
12. end for
13. Return $L = (d_i L_{ij})$ and $U = (U_{ij})$

در خط ۶ الگوریتم IULBF، فرآیند حذف بر روی درایه‌های L_{ij} و U_{ji} به کار می‌رود، یعنی

$$\begin{aligned} &if \quad |L_{ij}| < \varepsilon_L \quad \rightarrow L_{ij} = ۰, \\ &if \quad |U_{ji}| < \varepsilon_U \quad \rightarrow U_{ji} = ۰, \end{aligned}$$

که ε_L و ε_U به ترتیب برابرپارامتر حذف کردن، درایه‌های ماتریس‌های L و U می‌باشند. هم چنین در خط ۸ الگوریتم IULBF، به‌ازای $l > j$، فرآیند حذف مطابق با رابطه های (۴) و (۵) به کار می‌رود.

۳ نتایج عددی

در این بخش، نتایج مربوط به حل دستگاه معادلات خطی پیش شرط شده چپ با روش GMRES(16) [۵] را ارائه می‌کنیم. پیش شرط ها ILUFF (ILU factorization obtaind from Forward Factored APproximate INVerse) [۴] و IULBF می‌باشند. ماتریس‌های ضرایب فقط نامتقارن و از مرجع [۱] انتخاب شده‌اند. بردار b به صورت $b = Ae$ است که $e = [۱, ..., ۱]^T$ می‌باشد. برنامه‌های ILUFF، IULBF و GMRES(16) با استفاده از نرم افزار MATLAB، نوشته شده و بر روی ماشینی با حافظهRAM ، 1G اجرا شده‌اند. در هنگام ساخت پیش شرط‌های ILUFF و IULBF هرگاه عنصر لولا (d_j در الگوریتم ۱)، برابر صفر شده است آن را با $۱۰^{-۴}$ جایگزین کرده‌ایم. چگالی دو پیش شرط ILUFF و IULBF از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$density = \frac{nnz(L)+nnz(U)}{nnz(A)},$$

که $nnz(L)$، $nnz(U)$ و $nnz(A)$ به ترتیب برابر تعداد عناصر غیر صفر ماتریس‌های L، U و A می‌باشند. در تمام آزمایشات ε_U، ε_L، ε_W و ε_Z برابر با ۰.۱ انتخاب شده‌اند.
جدول ۱ نتایج مربوط به حل دستگاه‌های خطی مختلف با روش GMRES(16)، بدون استفاده از ماتریس پیش شرط را نشان می‌دهد. در این جدول، n، بعد ماتریس ضرایب را مشخص می‌کند. ستون مربوط به PD، معین مثبت بودن ماتریس را نشان می‌دهد. $Itime$، زمان اجرای GMRES(16) بدون پیش شرط سازی و it، تعداد تکرارهای روش GMRES(16) را نشان می دهد. زمان $Itime$ به ثانیه است. علامت $+$، در این جدول بدین معنی است که تعداد تکرارها بیش از ۱۰,۰۰۰ است. محک توقف در تمام آزمایش‌ها به صورت

$$\frac{\|r_k\|_۲}{\|r_۰\|_۲} \leq ۱۰^{-۸},$$

است که r_k، بردار باقیمانده در تکرار k ام و $r_۰$ بردار باقیمانده ابتدایی می‌باشد. در تمام آزمایش‌ها جواب ابتدایی، برابر صفر در نظر گرفته شده است.
در جدول ۲، اطلاعات مربوط به پیش شرط‌های ILUFF و IULBF و نتایج مربوط به حل دستگاه پیش شرط شده چپ ارائه شده است. $Ptime$، زمان پیش شرط سازی و $density$، چگالی مربوط به هر یک از پیش شرط‌ها می‌باشد. $Ttime$، مجموع زمان پیش شرط سازی و زمان اجرای GMRES(16) است. زمان‌های $Ptime$ و $Ttime$ نیز به ثانیه می‌باشند.

جدول ۱: اطلاعات مربوط به GMRES(16) بدون پیش شرط سازی

Matrix	n	nnz	PD	$Itime$	it
fs _ 183 _ 6	183	1000	No	+	+
hor _ 131	434	4182	No	67.594	4273
pde900	900	4380	Yes	0.203	10
cdde1	961	4681	No	1.469	67
epb0	1794	7764	No	+	+

جدول ۲: اطلاعات مربوط به GMRES(16) برای دستگاه‌های پیش شرط شده چپ

method	ILUFF				IULBF			
	density	Ptime	it	Ttime	density	Ptime	it	Ttime
fs _ 183 _ 6	0.743	2.141	1	2.375	0.631	2.062	1	2.109
hor _ 131	0.984696	22.031	5	23.031	0.893	21.86	3	22.454
pde900	1.273	125.531	2	126.953	1.288	126.578	2	128
cdde1	1.205	149.484	4	152.625	1.205	173.984	4	177.202
epb0	1.575	943.093	14	978.405	0.850	1121.75	24	1184.58

۴ نتیجه گیری

از جدول های ۱و۲ نتیجه می‌شود که تأثیر دو پیش شرط ILUFF و IULBF برای حل دستگاه خطی تقریباً یکسان بوده و هر دو پیش شرط ابزاری مناسب برای کاهش تعداد تکرارهای روش‌های زیر فضای کریلف می‌باشند.

مراجع

[1] T. Davis, University of Florida Sparse Matrix Collection. http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices.Accessed 2010.

[2] G. Luo, A new class of decomposition for inverting asymmetric and indefinite matrices, Comput. Math. Appl., 25 (1993), 95-104.

[3] D.K. Salkuyeh, A Sparse Approximate Inverse Preconditioner for Nonsymmetric Positive Definite Matrices, Journal of Applied Mathematics and Informatics., 28 (2010), 1131-1141.

[4] D.K. Salkuyeh, A. Rafiei and H. Roohani, ILU preconditioning Based on the FAPINV Algorithm, arXive:1010.2812., (2010).

[5] Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS publishing, New York., (1996).